

Aufgabenspezifische Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen

Michael Hernla

Veröffentlicht in *tm Technisches Messen, München, 64 (1997) 7/8, S. 286-293*

Schlagwörter: Koordinatenmessung, Messgerät, Geometrieabweichungen, Kreis, Messunsicherheit

Ausgehend von dem ISO-Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen und der Norm DIN 1319 Teil 4 werden die Grundlagen für die Bestimmung der Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen beschrieben. Schwerpunkte sind die Formulierung des mathematischen Modells der Messung und die Standardabweichungen der Ergebnisparameter. Am Beispiel des Ausgleichskreises wird das praktische Vorgehen erläutert und mit einer Messreihe die Richtigkeit des Ansatzes demonstriert. Zusätzlich werden die Auswirkungen der Abweichungen des Messgerätes auf den Kreis gezeigt und eine Anleitung zu ihrer Abschätzung gegeben.

Task specific uncertainty in coordinate measurement. Based on the ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement and the standard DIN 1319 part 4 the estimation of uncertainty of coordinate measurement is described. The main points are the formulation of the mathematical model of the measurement and the standard deviations of the resulting parameters. At the example of the mean circle the practical solution is explained, and the rightness of the method is shown with a sample of measurements. Additionally, the results of the measuring instrument on the circle are shown, and the rules to their estimation are given.

1. Einleitung

Koordinatenmessgeräte als universelle Messgeräte werden heute für eine große Zahl von verschiedenen Messaufgaben eingesetzt. Im Gegensatz zu anderen Messgeräten gibt es jedoch immer noch Probleme, wenn die Frage nach der Unsicherheit der Messergebnisse gestellt wird. Zwar liegen Richtlinien vor, die die Messabweichungen der Geräte beschreiben [1], für die Angabe der Unsicherheit bei beliebigen Messaufgaben existiert bisher jedoch keine allgemein anerkannte Grundlage, die auch die Anzahl und Lage der Antastpunkte auf einer mit Formabweichungen behafteten Oberfläche berücksichtigt. Diese Lücke soll mit den folgenden Ausführungen geschlossen werden.

Die Messunsicherheit ist ein dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftigerweise dem Messergebnis zugeordnet werden können [2]. Als Zahlenwerte werden bei internationalen Maßvergleichen bevorzugt die Standardabweichungen (Standardunsicherheiten) der Messgrößen angegeben. Bei der Angabe von Unsicherheiten für kalibrierte Normale und in der betrieblichen Praxis sind dagegen erweiterte Unsicherheiten üblich, die einen möglichen Streubereich mit einem Vertrauensniveau von ca. 95% beschreiben [3-5]. Diese erweiterte Unsicherheit liegt auch den Entscheidungsregeln [6] zur Beurteilung von geometrischen Produktspezifikationen zugrunde und wird deshalb für Zukunft eine große Bedeutung erlangen.

2. Mathematisches Modell

Im Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen [3] wird das Modell der indirekten Messung einer Messgröße Y aus mehreren Eingangsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n angegeben. Für Koordinatenmessungen ist das Modell jedoch zu erweitern, da hier in der Regel über ein Gleichungssystem mehrere Messgrößen Y_1, Y_2, \dots, Y_m gleichzeitig als Parameter der mittleren Formelemente (Ausgleichselemente) berechnet werden. Beispiele solcher Formelemente sind der Ausgleichskreis mit zwei Mittelpunktkoordinaten und dem Durchmesser sowie der Ausgleichszylinder mit zwei Koordinaten und zwei Winkeln der Achse sowie dem Durchmesser.

Die Berechnung mehrerer Messgrößen aus einem Gleichungssystem ist als Ausgleich vermittelnder Beobachtungen, Methode der kleinsten Quadrate oder Gaußverfahren bekannt. Das Verfahren ist z.B. in [7, 8] beschrieben, spezielle Darstellungen für die Koordinatenmessung finden sich z.B. in [9, 10]. Mit der Minimum-Bedingung für die Quadratsumme der Messpunktabstände senkrecht zum Ausgleichselement erhält man ein Normalgleichungssystem in der Form:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{n} \quad (1)$$

Dabei ist \mathbf{M} die Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen, die die Lage der Antastpunkte auf dem jeweiligen Formelement beschreibt, \mathbf{y} der Vektor der Messgrößen und \mathbf{n} der Vektor der Messwerte, multipliziert mit der transponierten Matrix \mathbf{A}^T der partiellen Ableitungen der Zielfunktion nach den einzelnen Messgrößen. Weiter gilt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \quad (2)$$

Das Normalgleichungssystem wird in der Regel iterativ gelöst und liefert die bestmöglichen Schätzwerte für die Messgrößen, die dann als Messergebnisse angegeben werden. Die Kovarianzmatrix \mathbf{S}_Y enthält die bestmöglichen Schätzungen für die Varianzen und Kovarianzen der Messgrößen [7, 8, 11, 12]:

$$\mathbf{S}_Y = \mathbf{M}^{-1} \cdot s^2 = \mathbf{Q} \cdot s^2 \quad (3)$$

Hierbei ist s^2 der Schätzwert der Varianz aus den unabhängigen Abweichungen δ_i der Antastpunkte senkrecht zum Ausgleichselement für die Anzahl $n-m$ der freien Parameter (Freiheitsgrade):

$$s^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \quad (4)$$

Die Standardabweichungen s_j und die Korrelationskoeffizienten r_{jk} der einzelnen Messgrößen erhält man aus den Koeffizienten q_{jk} der Gewichtsmatrix \mathbf{Q} wie folgt:

$$s_j = \sqrt{q_{jj}} \cdot s \quad \text{und} \quad r_{jk} = \frac{q_{jk}}{\sqrt{q_{jj}q_{kk}}} \quad \text{mit } j, k=1, 2, \dots, m \text{ und } j \neq k \quad (5)$$

Bei einer größeren Anzahl von freien Parametern können die Messgrößen nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Regelfall als normalverteilt angesehen werden, unabhängig von der Verteilung der Abweichungen δ_i . Die Unsicherheiten U_j der Messgrößen werden dann als erweiterte Unsicherheiten für das Vertrauensniveau $P=95\%$ bzw. $\alpha=1-P=5\%$ abgeschätzt:

$$U_j = s_j \cdot t_{1-\alpha/2, n-m} \quad (6)$$

Ein wichtiger Sonderfall ist der Mittelwert einer Messreihe ($m=1$). Die Matrix \mathbf{A} besteht dann aus einer einzigen Zeile mit n Elementen, die Matrix \mathbf{M} aus einem einzigen Element mit dem Wert n (Messwertanzahl), und die Matrix \mathbf{Q} allein aus einem Element mit dem Wert $1/n$. Es ergibt sich die bekannte Beziehung:

$$U_j = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha/2, n-1} \quad (7)$$

Werden aus den Formelementen weitere Formelemente (z.B. Kreis aus mehreren Kreismittelpunkten) oder andere Messergebnisse berechnet, so ist das Fortpflanzungsgesetz der Unsicherheiten anzuwenden. Dabei sind neben den Unsicherheiten ggf. auch die Korrelationskoeffizienten zu berücksichtigen.

2.1. Kreis

Die Gleichung des Kreises in der Ebene lautet:

$$(x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = r^2 \quad (8)$$

Um die partiellen Ableitungen bilden zu können, ist die Gleichung zunächst durch eine Reihenentwicklung nach Taylor zu linearisieren und umzuformen:

$$(x-x_M) + (y-y_M) - r = 0 \quad (9)$$

Mit der Division durch r erhält man folgende Gleichung, die von allen Antastpunkten erfüllt werden muss:

$$\cos\phi_i + \sin\phi_i - 1 = 0 \quad (10)$$

Die ϕ_i sind hier die Polarwinkel der Antastpunkte, bezogen auf den Kreismittelpunkt. Wegen der unvermeidlichen Messabweichungen sind die Gleichungen jedoch nicht Null, sondern es verbleiben auf der rechten Seite die Restabweichungen δ_i der Antastpunkte vom Ausgleichselement. Mit der Bedingung, dass die Quadratsumme dieser Abweichungen ein Minimum wird, erhält man das Normalgleichungssystem (1). Die transponierte Matrix \mathbf{A}^T der partiellen Ableitungen lautet:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & \dots & \cos\phi_i & \dots & \cos\phi_n \\ \sin\phi_1 & \dots & \sin\phi_i & \dots & \sin\phi_n \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem (1) ausführlich zu:

$$\begin{pmatrix} \sum \cos^2 \phi_i & \sum \cos \phi_i \sin \phi_i & \sum \cos \phi_i \\ \sum \cos \phi_i \sin \phi_i & \sum \sin^2 \phi_i & \sum \sin \phi_i \\ \sum \cos \phi_i & \sum \sin \phi_i & \sum 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \delta_i \cos \phi_i \\ \sum \delta_i \sin \phi_i \\ \sum \delta_i \end{pmatrix} \quad (12)$$

Die Summierung erfolgt jeweils über alle i bis zur Messpunktanzahl n . Die Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten erhält man aus Gleichung (5), die Unsicherheiten aus Gleichung (6). Der Vertrauensbereich des Mittelpunktes lässt sich als Ellipse darstellen, siehe Bild 1. Die Varianz der Kreislinie $s^2(\phi)$ erhält man nach dem Fortpflanzungsgesetz der Unsicherheiten unter Berücksichtigung der Korrelationskoeffizienten in Abhängigkeit vom Polarwinkel ϕ zum Mittelpunkt, die Unsicherheit wieder nach Gleichung (6) mit $s(\phi)$ und $m=3$:

$$s^2(\phi) = s_X^2 \cos^2 \phi + s_Y^2 \sin^2 \phi + s_R^2 + 2\rho_{XY} s_X s_Y \cos \phi \sin \phi + 2\rho_{XR} s_X s_R \cos \phi + 2\rho_{YR} s_Y s_R \sin \phi \quad (13)$$

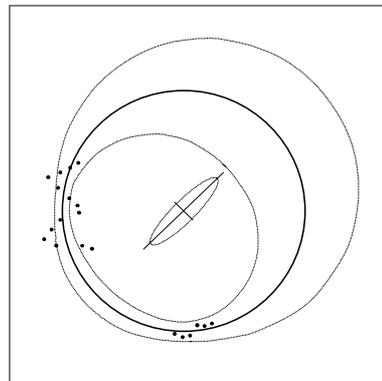


Bild 1:
Vertrauensbereich des
Ausgleichskreises bei 20 beliebig
angeordneten Messpunkten

Ein wichtiger Sonderfall ist die gleichabständige Anordnung der Antastpunkte am ganzen Kreisumfang. Man erhält dann für die Matrix der Normalgleichungen:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} n/2 & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \quad (14)$$

Die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind Null. Damit verschwinden die Korrelationskoeffizienten, und die Unsicherheiten der Mittelpunktkoordinaten und des Radius bzw. Durchmessers sind nur noch von der Messpunktanzahl abhängig:

$$u_X = u_Y = u_M = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot s \cdot t_{1-\alpha/2, n-3} \quad (15)$$

$$u_R = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot s \cdot t_{1-\alpha/2, n-3} \quad u_D = 2 \cdot u_R$$

Die Vertrauensellipse des Mittelpunktes wird zum Kreis, und der Vertrauensbereich der Kreislinie hat eine konstante Breite. Das Bild 2 zeigt ein Beispiel.

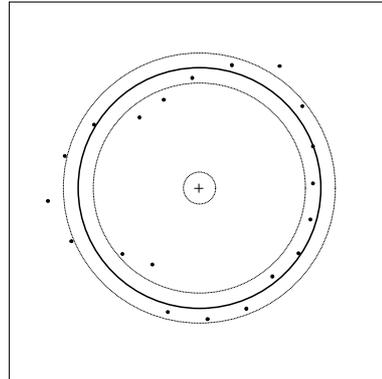


Bild 2:
Vertrauensbereich eines
Ausgleichskreises bei 20
gleichabständig auf dem Umfang
angeordneten Messpunkten

2.2. Formabweichungen der Oberfläche

Bei Gleichung (3) wurde der Schätzwert s^2 der Varianz der unabhängigen Abweichungen δ_i der Antastpunkte senkrecht zum Ausgleichselement eingeführt. Die entsprechende Standardabweichung s wird zur Abschätzung der Unsicherheit benutzt. Viele Oberflächen weisen jedoch ausgeprägte Formabweichungen auf, so dass die Abweichungen eben nicht unabhängig sind.

Ob das im Einzelfall zutrifft, kann anhand des Korrelationskoeffizienten r für benachbarte Antastpunktabweichungen geprüft werden [13]. Für den Kreis als geschlossenes Profil gilt:

$$r = \frac{\sum \delta_i \delta_j}{\sum \delta_i^2} \quad \text{mit } i=1,2,\dots,n, \quad j=i+1 \quad \text{und } j=1, \text{ wenn } i=n \quad (16)$$

Bei offenen Profilen, z.B. Geraden oder Kreisausschnitten, besteht kein Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endpunkt. Deshalb rechnet man hier:

$$r = \frac{\sum \delta_j \delta_{j+1}}{\sum \delta_i^2} \cdot \frac{n}{n-1} \quad \text{mit } i=1,2,\dots,n \quad \text{und } j=1,2,\dots,n-1 \quad (17)$$

Der Korrelationskoeffizient ist mit seinem Zufallshöchstwert für das Vertrauensniveau $P=1-\alpha$ zu vergleichen:

$$r_{\text{zmax}} = \frac{t}{\sqrt{n-m+t^2}} \quad \text{mit } t = t_{1-\alpha, n-m} \quad (18)$$

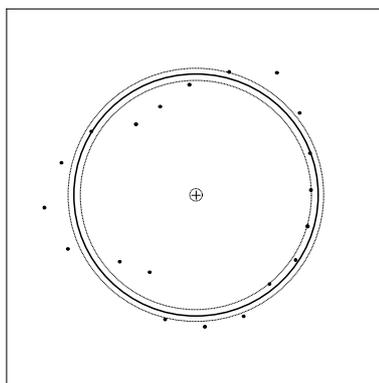
Für die Fragestellung interessiert nur die obere Grenze. Deshalb ist der Wert der t -Verteilung der Tafel für das einseitige Vertrauensniveau $P=1-\alpha$ zu entnehmen. Liegt der Korrelationskoeffizient unter dem Zufallshöchstwert, können die Abweichungen mit der statistischen Sicherheit P als unkorreliert angesehen werden. Sind sie zusätzlich normalverteilt, sind sie auch voneinander unabhängig. Die Standardabweichung kann ohne weiteres zur Abschätzung der Unsicherheit nach Gleichung (6) benutzt werden.

Anders liegt der Fall, wenn der Korrelationskoeffizient größer als der Zufallshöchstwert ist. Bei vielen Werkstücken aus der Fertigung weisen die Oberflächen Formabweichungen auf, aber auch die Messung selbst kann systematische Abweichungen aufweisen. Hier sind zunächst die systematischen von den zufälligen Messwertanteilen zu trennen. Zur Unsicherheitschätzung wird nur die Standardabweichung der zufälligen Restabweichungen benutzt.

Das Verfahren ist in [14] bis [17] beschrieben. In die Abweichungen vom Ausgleichselement werden nach dem oben beschriebenen Vorgehen zunächst im Prinzip beliebige Funktionen gerechnet. Es wird jeweils geprüft, ob der Korrelationskoeffizient größer oder kleiner als sein Zufallshöchstwert ist. Die Standardabweichung der verbleibenden zufälligen Restabweichungen wird zur Berechnung der

Unsicherheit der Ausgleichselemente benutzt. Das Bild 3 zeigt den Ausgleichskreis aus Bild 2 mit den entsprechenden Vertrauensbereichen, die hier deutlich schmaler sind. Die letztlich gefundene Funktion beschreibt die systematischen Abweichungen der mittleren Oberfläche vom Ausgleichselement. Diese ist wiederum der Ausgangspunkt zur Berechnung von angrenzenden formidealen Ersatzelementen, die die Paarungsgeometrie der Oberfläche wiedergeben, und der Unsicherheit ihrer Parameter.

Bild 3:
Vertrauensbereich des
Ausgleichskreises aus Bild 2,
geschätzt aus der
Standardabweichung der zufälligen
Restabweichungen

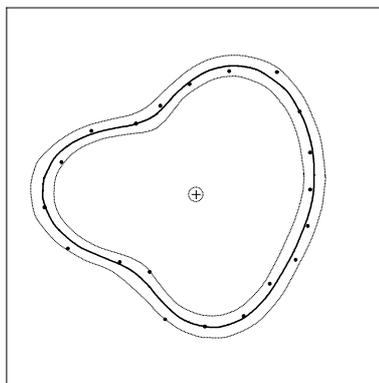


Bei Kreisprofilen haben sich Ansätze mit Summen orthogonaler trigonometrischer Funktionen bewährt, die bei der Fourieranalyse gewonnen werden. Hier können die Zufallshöchstwerte für die Amplituden der Harmonischen als ein weiteres Kriterium zur Trennung der systematischen von den zufälligen Messwertanteilen verwendet werden [16, 17]. Für gerade Oberflächenprofile eignen sich Summen nichtorthogonaler trigonometrischer Funktionen, deren Wellenlängen keine ganzzahligen Teile der Messlänge sind [18, 16].

Das Bild 4 zeigt das mittlere Profil aus der 2., 3. und 4. Harmonischen für die Messpunkte aus Bild 2 mit den Vertrauensbereichen des Mittelpunktes und der Profillinie. Sie sind deutlich schmaler als die am Ausgleichskreis. Für alle Funktionen werden die Unsicherheiten der Messgrößen wie oben beschrieben abgeschätzt. In der zitierten Literatur finden sich Beispiele. Dort wird auch gezeigt, dass die Restabweichungen in der Regel normalverteilt sind.

Der beschriebenen Trennung der zufälligen und systematischen Messwertanteile liegt mit dem Zufallshöchstwert des Korrelationskoeffizienten für die Abweichungen benachbarter Antastpunkte ein objektives Kriterium zugrunde. Dagegen führten alle bisherigen Versuche, mit Hilfe von Filtern dasselbe Ziel zu erreichen, zu Problemen mit den unterschiedlichen Filtercharakteristiken und Grenzwellenlängen. Selbst das heute allgemein verwendete Gaußfilter krankt daran, dass es keine objektiven Regeln zur Festlegung der Grenzwellenlängen gibt. Völlig unbrauchbar sind solche Filter bei den in der Koordinatenmesstechnik üblichen geringen Messpunktanzahlen bzw. relativ großen Punktabständen.

Bild 4:
Mittleres Profil und
Vertrauensbereiche für den Kreis aus
Bild 2



3. Unsicherheitsschätzung

Die Messunsicherheit äußert sich bei Wiederholungsmessungen in der Streuung der Formelemente-parameter. Werden solche Versuche praktisch durchgeführt, sind bei jeder Einzelmessung jeweils andere Punkte der Oberfläche anzutasten. Auf diese Weise geht der Einfluss der Oberflächengestalt in das Ergebnis ein. Bei Antastung an immer denselben Punkten streuen die Ergebnisse dagegen nur im Rahmen der Antastunsicherheit des Messgerätes, und die Streuungen sind deutlich kleiner.

Die Messpunktanzahl begrenzt die Genauigkeit bei der Ermittlung der wahren Oberflächengestalt. Stehen sehr viele Messpunkte zur Verfügung, erhält man (mit den überlagerten Funktionen) ein relativ genaues Abbild der Oberfläche und eine kleine Messunsicherheit. Die Reststreuung ist dann deutlich kleiner als am Ausgleichselement. Bei sehr wenigen Messpunkten kann aber das Ausgleichselement schon die bestmögliche Beschreibung der Oberfläche sein. Dann wird die Unsicherheit der Messgrößen mit der Standardabweichung zum Ausgleichselement richtig angegeben.

Das Bild 5 zeigt die Ergebnisse einer Messreihe von 100 Wiederholungsmessungen an einem Werkstück, wobei die 20 gleichabständigen Antastpunkte gegenüber der vorherigen Messung jeweils um 1/100 des Winkels zwischen zwei Punkten versetzt wurden. Die senkrechten Balken geben die aus den Einzelmessungen nach den Gleichungen (4) und (15) abgeschätzten Unsicherheiten an. Bezugswert der Darstellung ist in jedem Fall der Mittelwert aus den 100 Einzelmessungen.

Auf der linken Seite sind die aus der Standardabweichung am Ausgleichskreis geschätzten Unsicherheiten dargestellt, auf der rechten Seite die Unsicherheiten aus der Standardabweichung der unabhängigen Restabweichungen vom mittleren Profil.

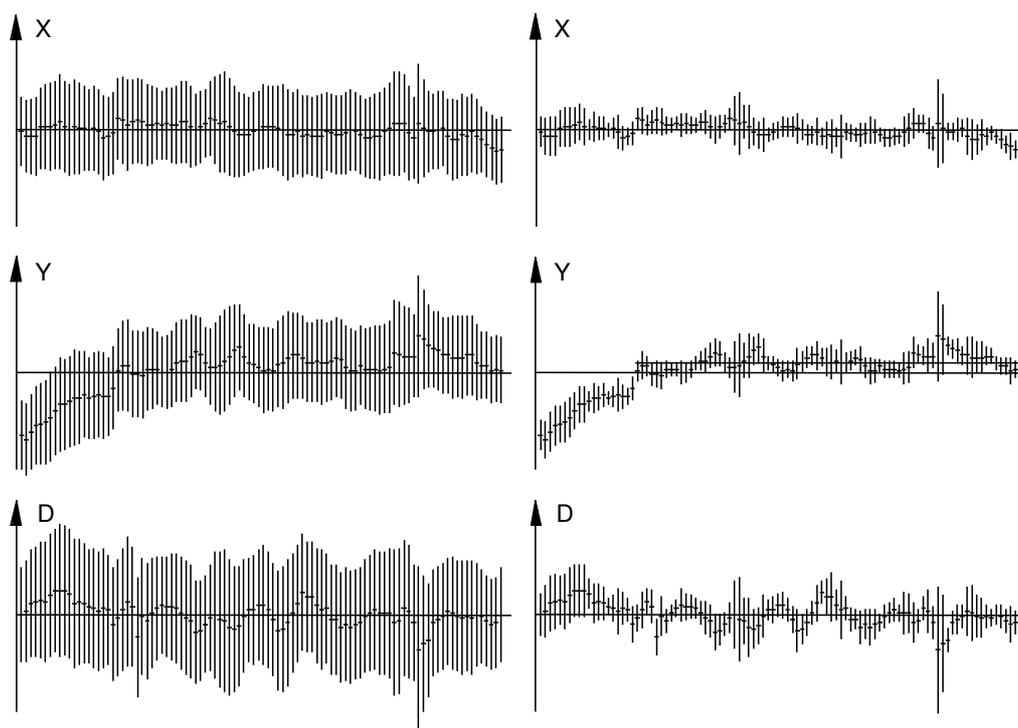


Bild 5: Wiederholungsmessungen mit Messwerten und abgeschätzten Vertrauensbereichen (senkrechte Balken); links mit der Standardabweichung am Ausgleichskreis, rechts mit der Standardabweichung der unabhängigen Restabweichungen am mittleren Profil

In der Tabelle 1 ist jeweils die Anzahl der Fälle angegeben, in denen der Betrag der Abweichung vom Bezugswert größer als die geschätzte Unsicherheit ist. Bei einem Vertrauensniveau von $P=95\%$ für die Unsicherheitsangabe muss man erwarten, dass in jeweils etwa fünf Fällen die Messabweichung

größer als die abgeschätzte Unsicherheit ist. Der Zufallsstrebereich der Poissonverteilung für die mittlere "Fehlerzahl" 5 (5% von 100 Messungen) und das Vertrauensniveau 95% beträgt 1,6...11,7.

Tabelle 1: Anzahl von Überschreitungen der Messunsicherheit durch die Abweichungen

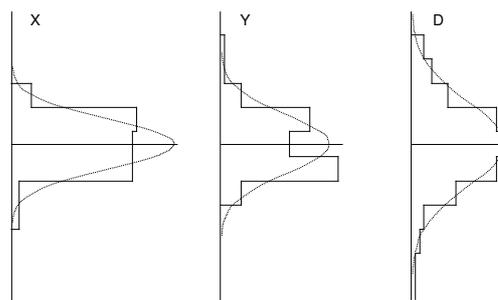
Messgröße	Ausgleichskreis	Restabweichungen	Messreihe
Mittelpunkt X	0	4	3
Mittelpunkt Y (Nr. 1-100)	7	50	23
Mittelpunkt Y (Nr. 21-100)	0	6	5
Durchmesser	0	5	9

Zum Vergleich werden für die drei Messgrößen die Unsicherheiten aus der Messreihe nach Gleichung (6) mit $n=100$ und $m=1$ berechnet. Die Überschreitungen dieser Unsicherheiten sind in der letzten Spalte von Tabelle 1 angegeben. Sowohl bei den Restabweichungen als auch bei der Messreihe liegen die Überschreitungen im Zufallsstrebereich. Bei der Unsicherheitsschätzung mit der Standardabweichung am Ausgleichskreis treten dagegen keine Überschreitungen auf.

Nur bei der Y-Koordinate gibt es 7 Überschreitungen am Ausgleichskreis, 50 für die Standardabweichung der Restabweichungen und 23 für die Messreihe. Hier ist aber zu Beginn der Messreihe sehr deutlich die Auswirkung der thermischen Verformung des Messgerätes (in Ständerbauweise) nach dem Einschalten des Gerätes und der Raumbelichtung zu sehen. Die zufälligen Abweichungen werden stark von systematischen überlagert. Nach Streichen der ersten zwanzig Werte und Berechnung eines neuen Mittelwertes (siehe Bild 5) liegen auch hier die Überschreitungen im erwarteten Bereich. Die Messunsicherheit wird also für den Ausgleichskreis deutlich zu groß, mit der Reststreuung der unabhängigen Restabweichungen der Messpunkte zur mittleren Oberfläche aber richtig abgeschätzt.

Im Bild 6 sind die Häufigkeitsverteilungen der Mittelpunktkoordinaten und des Durchmessers dargestellt, zusätzlich sind die Normalverteilungen eingezeichnet. Die Abweichungen der Häufigkeitsverteilungen von der Normalverteilung sind in Anbetracht der relativ wenigen Messungen gering. Mit einer größeren Anzahl von Messungen ist eine noch bessere Annäherung zu erwarten.

Bild 6:
Häufigkeitsverteilungen der Mittelpunktkoordinaten und des Durchmessers für die Messreihe aus 100 Messungen (Y-Koordinate nur mit Nr. 21 bis 100)



Die Unsicherheiten aus der Messreihe sollen nun mit den aus den Einzelmessungen geschätzten verglichen werden. Dazu werden aus den 100 Unsicherheiten der Einzelmessungen die Mittelwerte (über die Varianzen) gebildet, jeweils für die Abweichungen vom Ausgleichskreis und für die zufälligen Restabweichungen. Die Unsicherheiten sind in Tabelle 2 gegenübergestellt.

Tabelle 2: Vergleich der mit verschiedenen Verfahren ermittelten Messunsicherheiten (Y-Koordinate nur mit Nr. 21-100, Werte in μm)

Messgröße	Mittlere Unsicherheit		Unsicherheit aus der Messreihe	
	Ausgleichskreis	Restabweichungen	Einzelwert	Mittelwert
Mittelpunkt X	2,55	0,87	0,79	0,08
Mittelpunkt Y	2,55	0,87	0,96	0,10
Durchmesser	3,60	1,23	1,39	0,14

Bei den Restabweichungen werden im Mittel 3,4 Harmonische mit je zwei Parametern zur Beschreibung der systematischen Messwertanteile benötigt, die mittlere Anzahl der freien Parameter (Freiheitsgrade) ist also rund zehn. Der entsprechende Vertrauensbereich der Standardabweichung für das Vertrauensniveau 95% liegt zwischen $0,7s$ und $1,8s$. Der Vertrauensbereich der Standardabweichung der Messreihe mit 100 Messungen ist dagegen mit $0,88s \dots 1,16s$ deutlich kleiner. Die Differenzen zwischen den Unsicherheiten aus den Restabweichungen und den Unsicherheiten der Einzelwerte sind gering. Sie liegen innerhalb des Vertrauensbereiches der Standardabweichung der Messreihe und sind damit vernachlässigbar.

Beide Verfahren sind zur Abschätzung der Messunsicherheit geeignet. Die Messreihe hat natürlich den Nachteil, dass der Aufwand sehr groß ist. Deshalb wird die Abschätzung der Messunsicherheit aus den zufälligen Restabweichungen empfohlen. Mit der Standardabweichung am Ausgleichskreis wird die Messunsicherheit nach oben abgeschätzt. Sie sollte immer dann angegeben werden, wenn nichts besseres bekannt ist, weil z.B. die vorhandene Software keine Möglichkeit zur Beschreibung der Oberflächenabweichungen bietet.

4. Abweichungen der Messgeräte

Neben den Abweichungen aus der Oberfläche selbst und der Antastung sind auch die Anteile vom Taster und vom Messgerät in der Unsicherheitsangabe zu berücksichtigen. Die Unsicherheit des Tasters wird durch das Einmessen bestimmt. Verwendet man dazu einen Einstellring, können die oben abgeleiteten Gleichungen zur Abschätzung der Unsicherheiten des Tasterdurchmessers und seiner Mittelpunktkoordinaten verwendet werden. Da der Einstellring eine vernachlässigbar kleine Formabweichung haben sollte, genügt es, die Standardabweichung am Ausgleichskreis zu bestimmen, solange das Tastsystem keine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit der Antastabweichungen aufweist. Zusätzlich ist die Unsicherheit des Einstellring-Durchmessers zu berücksichtigen.

Die Auswirkungen der Geometrieabweichungen des Messgerätes sind nicht ganz so leicht zu überschauen, da sie für jede Messaufgabe und jede Messgröße unterschiedlich sind und überdies auch von der Lage des Messobjektes im Messbereich abhängen. Im folgenden werden deshalb die Auswirkungen der Geometrieabweichungen untersucht.

Bei dem Kreis in der Ebene wirken sich die Positionsabweichungen der Messgeräteachsen, die Geradheits- und Rotationsabweichungen der Bewegung sowie die Rechtwinkligkeit der Messgeräteachsen aus. Das Bild 7 zeigt, wie sich diese Abweichungen überlagern und dabei einen idealen Kreis verformen. Die Auswirkungen sind in jedem Fall direkt proportional zur Messlänge, hier der Kreisdurchmesser. (Für die Geradheitsabweichungen wurden Parabeln der Form $G_X=f(x)=ax^2/r^2$ mit a als maximale Abweichung und r als Kreisradius angenommen, für die Rotation Funktionen der Form $R_X=f(x,y)=ax^3y/r^4$.)

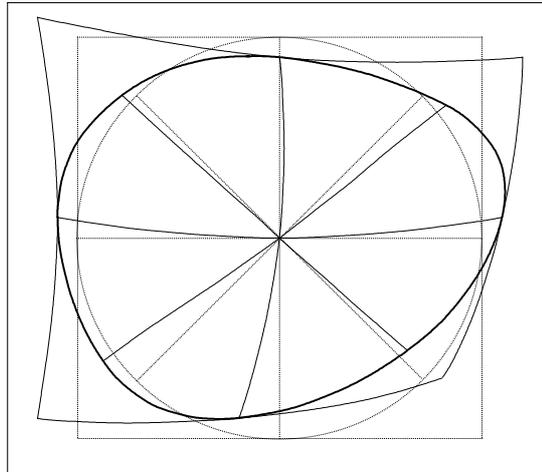


Bild 7:
Verformung eines
Kreises durch die
Geometrieabweichungen
des Messgerätes

Die Tabelle 3 gibt Zahlenwerte für die Auswirkungen der einzelnen Abweichungen an. Die Ergebnisse sind auf den Betrag der jeweiligen Abweichung normiert. So verursacht z.B. eine Positionsabweichung a auf einer dem Kreisdurchmesser D entsprechenden Länge L in X -Richtung eine Formabweichung vom gleichen Betrag ($F_K=a$), während die Durchmesserabweichung nur halb so groß ist ($\Delta D= 0,5a$). Es wird angenommen, dass diese bei gleichen Längen jeweils (etwa) gleiche Beträge haben. In Abhängigkeit von den Vorzeichen der Abweichungen sind die Auswirkungen natürlich unterschiedlich. Auf der rechten Seite der Tabelle sind die resultierenden Längenmessabweichungen in den Achs- und Diagonalenrichtungen angegeben (ebenfalls normiert), wie man sie bei der Prüfung des Messgerätes mit geeigneten Normalen erhält. Werden die einzelnen Messgrößen durch die jeweiligen Abweichungen nicht beeinflusst, steht an der entsprechenden Stelle der Tabelle kein Zahlenwert, sondern nur ein Strich.

Tabelle 3: Auswirkungen der Geometrieabweichungen eines Koordinatenmessgerätes auf die Messgrößen am Kreis sowie auf die Längenmessabweichungen in Achs- und Diagonalenrichtung, normiert auf den Betrag der jeweiligen Abweichung

Messgeräteabweichungen	Messgrößen am Kreis				Längenmessabweichungen			
	ΔX	ΔY	ΔD	F_K	ΔL_X	ΔL_Y	ΔL_I	ΔL_{II}
Position $P_X=1$	-	-	0,5	1	1	-	0,5	0,5
Position $P_Y=1$	-	-	0,5	1	-	1	0,5	0,5
Geradheit $G_X=1$	-	0,5	-	0,77	-	-	-	-
Geradheit $G_Y=1$	0,5	-	-	0,77	-	-	-	-
Rotation $R_X=1$	-	-	-	0,57	1	-	-	-
Rotation $R_Y=1$	-	-	-	0,57	-	1	-	-
Rechtwinkligkeit $R_{XY}=1$	-	-	-	1	-	-	0,5	-0,5
Maximalwerte bei Überlagerung aller Anteile, jeweils bezogen auf die eindimensionale Längenmessabweichung	0,5	0,5	1	3,11	1	1	1,5	1,5

Im unteren Teil der Tabelle sind die Maximalwerte der einzelnen Messgrößen bei der Überlagerung aller Abweichungsanteile dargestellt. Haben die Positionsabweichungen gleiche Vorzeichen, ist die größtmögliche Durchmesserabweichung gerade so groß wie die eindimensionale Längenmessabweichung. Bei unterschiedlichen Vorzeichen ergibt sich die maximale Formabweichung, die rund dreimal

so groß ist. Die Abweichungen der Mittelpunktkoordinaten sind höchstens halb so groß wie die Längenmessabweichung.

Da die Fehlergrenzen von den Abweichungen nicht überschritten werden sollen, kann man im allgemeinen davon ausgehen, dass sie eingehalten sind. Die Fehlergrenzen eignen sich damit zur Abschätzung der Messgeräteabweichungen auf die Kreisparameter. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die (für die Messung von Parallelendmaßen angegebenen) Fehlergrenzen der Messgeräte neben dem längenabhängigen auch einen konstanten Anteil enthalten. Dieser beschreibt die Antastunsicherheit an den Messflächen der Endmaße und die Abweichung des Tasterdurchmessers. Bei der Messung an beliebigen Werkstücken werden diese Anteile aber nach dem oben beschriebenen Vorgehen gesondert abgeschätzt. Hier interessiert also nur der längenabhängige Anteil, genauso, wie die in Tabelle 3 dargestellten Auswirkungen der Geometrieabweichungen des Messgerätes direkt längenproportional sind.

Dasselbe gilt auch für Fortpflanzung der Unsicherheit bei weiteren Messaufgaben, z.B. dem Abstand von zwei Kreismittelpunkten. Auch hier nur ist der längenabhängige Anteil der Längenmessabweichung in der der Messaufgabe entsprechenden Dimension (Achse, Ebene oder Raum) zu verwenden. Wird die Herstellerangabe der Längenmessabweichung zur Abschätzung dieser Unsicherheitsanteile verwendet, so ist nur der längenabhängige Anteil heranzuziehen. Beispielsweise beträgt dieser Anteil für die Angabe $(4+L/200)$ μm bei 200 mm Messlänge 1 μm . Genauso groß ist der Unsicherheitsanteil des Messgerätes für den Kreisdurchmesser 200 mm, der Unsicherheitsanteil der Formabweichung ist rund 3 μm . Diese Anteile sind mit den oben besprochenen zusammenzufassen.

Die auf diese Weise geschätzten Unsicherheiten bedeuten jedoch nicht, dass die Abweichungen tatsächlich so groß sind. Vielmehr ist zu erwarten, dass sie in den meisten Fällen deutlich darunter liegen. Das ergibt sich allein schon aus der Tatsache, dass die Abweichungen des Messgerätes im Messbereich unterschiedlich groß sind (und sich auch mit der Zeit verändern können), die Herstellerangaben aber für den ganzen Messbereich gelten. Die überwiegende Zahl der Abweichungen wird also klein gegenüber den Fehlergrenzen des Herstellers sein, während nur ein kleiner Teil in der Nähe der Grenzen liegt. Die praktische Erfahrung bestätigt diese Überlegung.

Deshalb ist es realistisch, für diese Abweichungen näherungsweise eine Normalverteilung anzunehmen. Die Fehlergrenze entspricht dann etwa der Vertrauensgrenze für das Vertrauensniveau 95% und kann einfach mit den oben abgeschätzten Unsicherheitsanteilen quadratisch addiert werden [4, 19].

Wie groß die Abweichungen im Einzelfall sind, kann durch die Messung eines geeigneten Normals geprüft werden. Für den Kreis z.B. sind kalibrierte Kugeln und Einstellringe leicht verfügbar. Natürlich streuen die Abweichungen des Durchmessers und die Formabweichung und sind an verschiedenen Stellen im Messvolumen unterschiedlich groß. Mit dem oben beschriebenen Vorgehen können aber aus einer entsprechenden Messreihe ebenfalls Mittelwerte und Standardabweichungen berechnet und damit Vertrauensgrenzen für die Messgeräteabweichungen angegeben werden.

Einen weiteren, nicht zu vernachlässigenden Einfluss hat die Temperatur; zu diesem Thema wird hier jedoch nur auf die Literatur verwiesen [20].

Zusammenfassung

Bei Koordinatenmessungen werden durch Ausgleichsrechnung mittlere Formelemente bestimmt, deren Parameter die gesuchten Messgrößen sind. Man erhält Kovarianzmatrizen, aus denen u.a. die Standardabweichungen der Messgrößen berechnet werden können. Die Unsicherheiten erhält man durch Multiplikation der Standardabweichung der zufälligen Messabweichungen mit dem Faktor der t-Verteilung. Die Unsicherheit wird wesentlich durch die Formabweichungen der Werkstückoberfläche und der Anzahl und Lage der Messpunkte bestimmt. Die Unsicherheit der Messgrößen wird in jedem Fall mit der Standardabweichung am Ausgleichselementen nach oben abgeschätzt. Bei rein zufälligen (unabhängigen) Messabweichungen ergeben sich schon mit der Standardabweichung am Ausgleichselement die richtigen Unsicherheiten. In allen anderen Fällen sind die zufälligen von den systematischen Messwertanteilen zu trennen. Die Trennung erfolgt anhand objektiver Kriterien, z.B. dem Zufallshöchstwert des Korrelationskoeffizienten für benachbarte Antastpunktabweichungen. Eine Filterung der Messwerte mit Filtern verschiedener Grenzwellenlängen und Übertragungscharakteristiken zur Abtrennung der zufälligen Anteile ist nicht erforderlich. Der mittlere Verlauf der Oberfläche als systematischer Messwertanteil wird durch Funktionen beschrieben, die im Prinzip beliebig gewählt werden können. Die systematischen Messwertanteile beschreiben bestmöglich den wirklichen Oberflächenverlauf und stellen das eigentliche Messergebnis dar. Die Unsicherheit der Formelementepara-

meter wird mit der Standardabweichung der zufälligen Messwertanteile richtig abgeschätzt. Neben den zufälligen Messwertanteilen aus der Antastung der Werkstückoberfläche sind auch die Anteile des Messgerätes zu berücksichtigen. Die Unsicherheit beim Einmessen des Tasters wird wie die Unsicherheit eines von Formabweichungen freien Werkstückes abgeschätzt. Die Auswirkungen der Geometrieabweichungen des Koordinatenmessgerätes sind bei den verschiedenen Messaufgaben und Messgrößen unterschiedlich. Die Anteile der Geometrieabweichungen an den Unsicherheiten der Messgrößen können aus den Fehlergrenzen der Längenmessabweichung abgeschätzt werden. Die Unsicherheitsanteile sind Teile bzw. Vielfache des längenabhängigen Anteils dieser Fehlergrenzen. Entsprechend der Messaufgabe sind die Fehlergrenzen der ein-, zwei- oder dreidimensionalen Längenmessabweichung zu verwenden. Die aufgabenspezifischen Unsicherheitsanteile des Messgerätes werden mit denen des Werkstücks und des Tasters durch quadratische Addition zusammengefasst.

Literatur

- [1] VDI/VDE 2617 (Blatt 1 bis 6.2): Genauigkeit von Koordinatenmessgeräten. Kenngrößen und deren Prüfung
- [2] VIM Internationales Wörterbuch der Metrologie. Beuth Verlag 1994
- [3] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Beuth Verlag 1995
- [4] ISO TR 14253-2 (0/1995): Geometrical Product Specifications (GPS); Inspection by measurement of workpieces and measuring instruments; Part 2: Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement, in calibration of measuring instruments and in product verification
- [5] DKD-3: Ermittlung von Messunsicherheiten. Deutscher Kalibrierdienst, Braunschweig 1991
- [6] DIN ISO 14253-1 (Entwurf 1995): Geometrische Produktspezifikationen (GPS); Prüfung von Werkstücken und Messgeräten durch Messungen; Teil 1: Entscheidungsregeln für die Feststellung von Übereinstimmung oder Nicht-Übereinstimmung mit der Spezifikation (Vorschrift)
- [7] DIN 1319 Teil 4 (1985): Grundbegriffe der Messtechnik; Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen
- [8] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer Verlag 1984
- [9] Lotze, W.: Ausgleichskreis in der Koordinatenmesstechnik. Feingerätetechnik 30 (1981) 12, S. 538-542
- [10] Kern, J.: Theorie zur Berechnung von Formelementen der Koordinatenmesstechnik nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme. Dissertation TU Dresden 1987
- [11] Lotze, W.: Die Unsicherheit des Ausgleichskreises aus Koordinatenmessungen. Feingerätetechnik 32 (1983) 2, S. 72-75
- [12] Krauß, W.: Fehlertheorie zur Koordinatenmessung ebener und räumlicher Werkstücke. Dissertation TU Dresden 1984
- [13] Täubert, P.: Abschätzung der Genauigkeit von Messergebnissen. Verlag Technik Berlin 1985
- [14] Rogazewski, P.: Ein Modell zur Auswertung von Messwertfolgen im Hinblick auf gemessene Oberflächenprofile. Metrologische Abhandlungen, Berlin 8 (1988) 4, S. 291-295
- [15] Rogazewski, P.: Die Verteilungsdichte der Fourierkoeffizienten normalverteilter Messwertanteile. Metrologische Abhandlungen, Berlin 8 (1988) 3, S. 217-223
- [16] Hernla, M.: Abschätzung der Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen unter den Bedingungen der industriellen Fertigung. VDI-Fortschrittberichte Reihe 2, Nr. 274, Düsseldorf 1992
- [17] Hernla, M.: Die Unsicherheit von angrenzenden Formelementen. Qualität und Zuverlässigkeit, München 38 (1993) 6, S. 373-378
- [18] Rogazewski, P.: Zur Approximation von Messwertfolgen mit nichtorthogonalen trigonometrischen Funktionen. Metrologische Abhandlungen, Berlin 9 (1989) 2, S. 125-136
- [19] Hernla, M.: Messunsicherheit und Fähigkeit. Qualität und Zuverlässigkeit, München 41 (1996) 10, S. 1156-1162
- [20] Neumann, H. J.; Hernla, M.: Der Einfluss der Temperatur bei Längenmessungen. Qualität und Zuverlässigkeit, München 42 (1997) 4, S.464-468